Strukturintegritäts- Anwendungen 1

Dr. Prodán Miklós
Tit.-Universitätsdozent

Mérnöki szerkezetek integritása 1
német nyelvű kurzus: **Bruchmechanik GL**
(Tárgyfelelös: Dr. Májlinger Kornél, tszv. egyet. docens
“Materialkunde” & “Metalltechnologie”)

2021/2022/1

Referenzliteratur zur Einführung in die Bruchmechanik

EMPA

Eidgenössische Materialprüfungs- und Versuchsanstalt
Laboratoire fédéral d'essai des matériaux et institut de recherches
Laboratorio federale di prova dei materiali ed istituto sperimentale
Swiss Federal Laboratories for Materials Testing and Research

Bericht Nr. 213

Ein bruchmechanisch abgestütztes Verfahren zur Bestimmung des Ermüdungsverhaltens bauteilähnlicher Scheiben

M. Prodan

Kapitel A. 2., Seiten 10 – 15

Einführung

A.2. Bruchmechanische Grundlagen

Unter Bruchmechanik versteht man eine Festigkeitslehre für Teile mit Rissen. Sie ergänzt die klassische Festigkeitslehre, die Materialien ohne rissartige Fehler voraussetzt.

Da über die theoretischen Grundlagen der Bruchmechanik eine umfassende Fachliteratur besteht (eine neue Uebersicht enthält z.B. [2]), sollen hier nur die im Zusammenhang mit dieser Arbeit unerlässlichen Begriffe und Beziehungen kurz rekapituliert werden. Sie beruhen im wesentlichen auf zwei Fundamenten: einerseits auf der kontinuumsmechanischen Analyse singulärer Spannungsfelder in der Umgebung eines Risses und anderseits auf Energiebetrachtungen [3].

Eine Beschränkung auf den Beanspruchungsmodus I - wie in Figur A.2.1 anhand eines unendlich ausgedehnten Körpers dargestellt - ist damit begründet, dass neben dem Zugmodus I die Schubmodi II und III in der Praxis meistens eine untergeordnete Rolle spielen*.

Mit den nach Irwin [4] - und auch nach Williams und Sneddon - benannten Gleichungen lässt sich das Spannungs-, Dehnungs-

---

* K ohne Index bezieht sich in dieser Arbeit auf Beanspruchungsmodus I, ist also gleichbedeutend mit K_I.

Illustration zu den bruchmechanischen Grundlagen

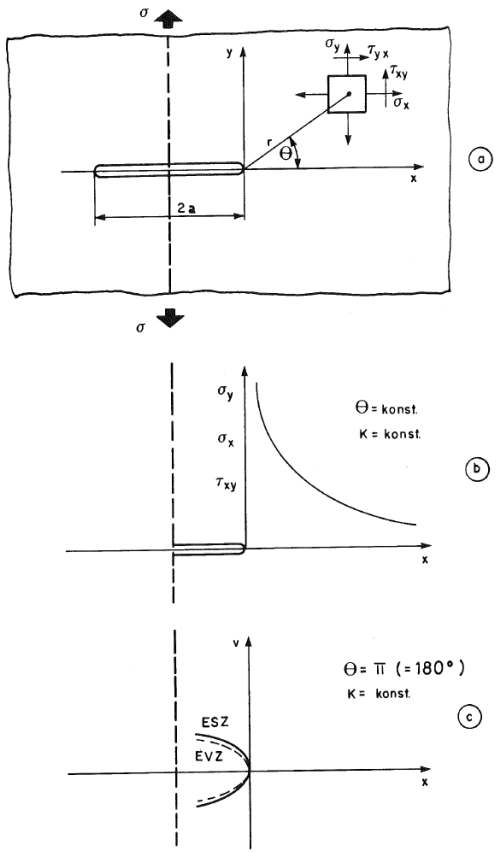

Fig. A.2.1 Spannungs- und Verschiebungsverlauf nahe der Rissfront in einer unendlich ausgedehnten Scheibe unter einachsiger Zugbeanspruchung (Durchriss der Länge 2a)

Spannungs-, Dehnungs- und Verschiebungsfelder in Rissnähe

und Verschiebungsfeld in unmittelbarer Rissnähe tensoriell beschreiben:

$$\sigma_{ij}(r,\theta) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta),$$

$$\varepsilon_{ij}(r,\theta) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} g_{ij}(\theta), \qquad (1)$$

$$u_i(r,\theta) = K \frac{\sqrt{2r}}{\pi} h_i(\theta).$$

Die rechten Seiten der Gleichungen (1) können in je zwei Teile separiert betrachtet werden. Der eine Teil beschreibt die Verteilungen und ist nur eine Funktion der Koordinaten. Im Falle der Spannungen ist dieser Teil $f_{ij}(\theta)/\sqrt{2\pi r}$. Der andere Teil beschreibt die Intensität der Spannungssingularität. Dieser Teil ist der Spannungsintensitätsfaktor K.

Allerdings ist der Spannungsintensitätsfaktor in der Praxis abhängig von der Geometrie des betrachteten Körpers, der Risskonfiguration sowie der Beanspruchung, und da die lineare Elastizitätstheorie zugrundeliegt, hängt er linear von den beanspruchenden Kräften ab.

Wenn K bekannt ist, sind - linear-elastisches Verhalten des Materials auch bei extremer Verformung vorausgesetzt - alle Komponenten von σ_{ij}, ε_{ij} und u_i in unmittelbarer Umgebung der Rissfront bekannt. Die Gleichungen (1) sind dann für $r \to 0$ exakte Lösungen und können als gute Näherung für die Bereiche dienen, in denen r klein im Vergleich mit den übrigen Längenabmessungen (z.B. der Risslänge) ist.

Nach Publikation [5] hat die Spannungsgleichung von (1) im einzelnen die Form:

Mit kartesischen Koordinaten x, y und z

$$\sigma_{x,y} = K \frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 \mp \sin(\theta/2)\sin(3\theta/2)\right),$$

$$\tau_{xy} = K \frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2\pi r}} \left(\sin(\theta/2)\cos(3\theta/2)\right), \qquad (2)$$

$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ für ebenen Verformungszustand (EVZ)

$\sigma_z = 0$ für ebenen Spannungszustand (ESZ).

ν ist dabei die Poissonsche Querkontraktionszahl, und sowohl für EVZ als auch für ESZ gilt

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \text{ und}$$

$$K = \sigma \sqrt{\pi a}. \qquad (3)$$

Wie aus Gleichung (3) ersichtlich ist, hat der Spannungsintensitätsfaktor K die Dimension Spannung$\cdot\sqrt{\text{Länge}}$. Diese wird gewöhnlich in zusammengezogener Form geschrieben (z.B. $Nmm^{-3/2}$) wodurch die Anschaulichkeit, die in der Formulierung mit dem Spannungsniveau σ und der halben Risslänge a durchaus vorhanden wäre, verlorengeht [6].

Die Gleichungen (2) nehmen auf der x-Achse eine sehr einfache Form an: Für $\theta = 0$ erhält man

$$\sigma_y = \sigma_x = \frac{K}{\sqrt{2\pi x}}$$

und $\tau_{xy} = 0$.

Der kritische Wert des Spannungsintensitätsfaktors ist die Bruch- oder Risszähigkeit, die unter gegebenen Umständen einen Werkstoffkennwert darstellt. Gleichung (3) drückt somit das fundamentale linear-elastische Bruchkriterium aus. Mit ihrer Hilfe lassen sich bei gegebener Beanspruchung (σ_{zul}) kritische Rissgrössen (a_c) oder bei gegebenen Rissgrössen (a_{zul}) kritische Beanspruchungen (σ_c) abschätzen, bei denen

Hinweis auf Körper mit endlichen Abmessungen

der Riss instabil wird und infolgedessen der Bruch eintritt.

Hier sei auf Publikation [7] hingewiesen, dort wird u.a. die Frage behandelt, wie die klassischen Versagenshypothesen optimal mit der bruchmechanischen Betrachtungsweise zu kombinieren sind. Beide Methoden dienen der Bemessung von Bauteilen, werden aber - was z.B. die Anwendungen auf Kernkraftwerkskomponenten betrifft - in der Regel getrennt behandelt.

Für Körper mit beliebigen endlichen Begrenzungen und anderen Rissanordnungen als bisher vorausgesetzt gilt das in Gleichung (3) formulierte Bruchkriterium in der etwas verallgemeinerten Form

$$K = \sigma\sqrt{a}\ Y, \qquad (4)$$

wobei Y eine von der geometrischen Konfiguration (Riss und Gesamtkörper) abhängige Funktion ist.

Auch bei Berücksichtigung eines elastisch-plastischen Materialverhaltens empfiehlt sich für den Anfang eine Erweiterung des Gültigkeitsbereichs des linear-elastischen bruchmechanischen Konzepts, gekennzeichnet durch eine Korrektur zur Berücksichtigung einer plastischen Zone an der Rissfront. Die Brauchbarkeit des bruchmechanischen Ansatzes für die Praxis ist wesentlich bedingt durch die Geringfügigkeit dieser Korrektur.

Bei wiederholter Beanspruchung (Ermüdungsriss-Wachstum) betrachtet man die Schwingbreite ΔK des Spannungsintensitätsfaktors, die für den Rissfortschritt eine bestimmende Rolle spielt.

Verschiebungen u und v der Rissufer in x- und y-Richtungen

Aehnlich der Beschreibung des Spannungszustandes durch die Gleichungen (2) lautet diejenige für die elastischen Verschiebungen u und v der Rissufer in x- und y-Richtung, gültig in der Nähe der Rissfront bei EVZ:

$$u = \frac{K(1+\nu)}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left(2 - 4\nu + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right), \qquad (5)$$

$$v = \frac{K(1+\nu)}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left(4 - 4\nu - 2\cos^2\frac{\theta}{2}\right) \qquad (6)$$

und bei ESZ

$$u = \frac{K(1+\nu)}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left(\frac{3-\nu}{1+\nu} - 1 + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right), \qquad (7)$$

$$v = \frac{K(1+\nu)}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left(\frac{3-\nu}{1+\nu} + 1 - 2\cos^2\frac{\theta}{2}\right). \qquad (8)$$

Dabei ist E der Elastizitätsmodul. Für $\theta = \pm\pi$ wird $u = 0$, und die Rissuferverschiebung in y-Richtung berechnet sich bei EVZ aus

$$v(r) = \frac{K}{E}(1-\nu^2)\sqrt{\frac{8r}{\pi}} \qquad (6a)$$

und bei ESZ aus

$$v(r) = \frac{K}{E}\sqrt{\frac{8r}{\pi}}. \qquad (8a)$$

Bei gegebener Spannung (σ) öffnen sich also die Rissufer längs $r (r \ll a)$ parabolisch proportional zu K. Bei EVZ geschieht dies etwas weniger als bei ESZ (Fig. A.2.1.c.).

Zusammenfassung auf Grund des Modells „unendliche Scheibe, einachsiger Zug“

Der Spannungsintensitätsfaktor bei Beanspruchungsmodus I (römisch 1, nicht i):

$$K = \sigma \sqrt{\pi a}.$$

Die σy-Spannung, senkrecht auf die Rissebene:

$$\sigma_y = \sigma_x = \frac{K}{\sqrt{2\pi x}}$$